多小波图象变换的统计分析

黄卓君 马争鸣
(中山大学电子系信息处理实验室,广州 510275)

摘 要 多小波是一种新的小波,多小波的应用更是近几年才日见兴起,因此,有关多小波图象变换的一些基本统计数据,如均值、方差、量化后零系数的比例等等,尚未见诸学术刊物,而这些数据又是从事多小波图象编码研究的基本依据.从学术刊物和互联网上收集了5种不同性质的多小波,对这些多小波图象变换特性进行了详尽的统计分析.通过统计分析发现:(1)图象经过CL多小波变换后,能量不但汇聚在最低分辨率的子图象上,而且还进一步汇聚在最低分辨率子图象的第一个分量上,因此,CL多小波最适合图象编码;(2)图象经过CARDBAL多小波变换后,能量不但汇聚在最低分辨率的子图象上,而且还平均分摊在最低分辨率子图象的4个分量上,因此,通过相关性编码可以大幅度提高CARDBAL多小波图象编码的压缩比;(3)图象经过GHM多小波变换后,最低分辨率子图象的能量既不是集中在一个分量上,也不是平均分配在4个分量上,因此,尽管GHM是最早发现的多小波,且是目前最为常用的多小波,但它其实并不是图象编码的首选.

关键词 多小波 图象编码 统计分析

中图法分类号: TN919.81 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2001)12-1198-06

Statistical Analysis of Multiwavelet Image Transform

HUANG Zhuo-jun, MA Zheng-ming
(*Lab. of Information Processing, Dept. of Electronics and Communication Engineering, Guangzhou 510275*)

Abstract Multiwavelet is a new kind of wavelets and application of multiwavelet to signal processing is also a new practice these years. Perhaps this is why we hardly find the statistical data such as mean, variance and the proportion of zero-valued quantized coefficients of multiwavelet transforms in literatures. In this paper, we collect five multiwavelets from literatures and Internet and make a statistical analysis of their performance in multiwavelet transform. From our analysis we can conclude that (1) After CL multiwavelet transform, the energy of an image will converge not only to the lowest resolution subimage, but further to the first component of the subimage. Therefore, CL multiwavelet is most qualified for image coding. (2) After CARDBAL multiwavelet transform, the energy of the lowest resolution subimage of an image will spread in average among its four components. Therefore, CARDBAL multiwavelet image coding has to appeal to correlative coding between the components of subimage to improve its compression ratio. (3) After GHM multiwavelet transform, the distribution of the lowest resolution subimage's energy is not concentrated on one of its components, not averaged among its components. Therefore, GHM multiwavelet is not particularly suitable to image coding, even though it is the first multiwavelet to be discovered and now widely used in applications.

Keywords Multiwavelets, Image coding, Statistical analysis

0 引 言

多小波可以看成是单小波的推广,它涉及多个小波.但是,多小波不是多个单小波的简单堆积.多小波所包含的多个单小波之间,必须满足一定的数学关系,因此,把这种小波称为多小波(multiwavelets),而不是称为向量小波或小波向量

收稿日期:2000-12-13;改回日期:2001-03-07

(wavelet vector)[1,2].多小波具有一些单小波所没有的优点,如多小波可以集紧支柱、正交、对称和消失矩于一身[3].多小波的应用(如去噪、数据压缩等)近年来已日见成效[3].本文从学术刊物和互联网上收集了5种不同性质的多小波[4~7],并分别对这5种不同性质的多小波图象变换进行了统计分析,由此得到的统计数据和结论,相信对于多小波的应用(如多小波图象编码)会有一定的参考价值.

多小波图象编码与(单)小波图象编码的区别在于:多小波图象编码开辟了子图象分量编码的天地.本文的统计分析表明:一幅图象,采用不同的多小波进行图象变换,得到的子图象的各个分量性质迥异.因此,多小波图象编码算法应该因所采用的多小波之不同而不同.

1　多小波图象变换

1.1　向量信号的多小波变换

对一个向量信号 $\boldsymbol{F}(n)=(f_1(n),f_2(n),\cdots,f_K(n))^{\mathrm{T}}$ 进行多小波变换的公式如下

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Low}}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{L}(n-2m)\boldsymbol{F}(n)$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{High}}(m)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{H}(n-2m)\boldsymbol{F}(n)$$

其中,$\boldsymbol{L}(n)$ 和 $\boldsymbol{H}(n)$ 都是 $K\times K$ 的矩阵,分别由多尺度函数和多小波确定.不同的多小波产生不同的 $\boldsymbol{L}(n)$ 和 $\boldsymbol{H}(n)$.K 是多小波所包含的(单)小波个数.这里所讨论的GHM多小波[4,5]、CL多小波[6]和3种不同阶数的ID多小波[7]都是 $K=2$ 的多小波.多小波反变换的公式如下

$$\boldsymbol{F}(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(n-2m)\boldsymbol{F}_{\mathrm{Low}}(m)+\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(n-2m)\boldsymbol{F}_{\mathrm{High}}(m)$$

1.2　前置滤波器的设计

多小波变换只能对向量信号进行变换,因此,普通的标量信号必须转换为向量信号才能进行多小波变换.具体步骤如下:

(1) 先用奇偶方法把标量信号 $s(n)$ 转换为向量信号 $\boldsymbol{S}(n)$:$\boldsymbol{S}(n)=\begin{bmatrix}s(2n)\\s(2n+1)\end{bmatrix}$.一个长度为 N 的标量信号,通过奇偶方法可以转换为一个长度为 $\frac{N}{2}$ 的二维向量信号,依然是 $2\times\frac{N}{2}=N$ 个数据.

(2) 对向量信号 $\boldsymbol{S}(n)$ 进行前置滤波(Prefilting)

$$\boldsymbol{F}(n)=\sum_k\boldsymbol{P}_{\mathrm{re}}(k)\boldsymbol{S}(n-k)$$

对于GHM多小波

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{re}}(0)=\begin{bmatrix}\frac{3}{8\times\sqrt{2}} & \frac{10}{8\times\sqrt{2}}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{re}}(-1)=\begin{bmatrix}\frac{3}{8\times\sqrt{2}} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

对于CL多小波

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{re}}(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{1+\sqrt{7}} & -\frac{1}{1+\sqrt{7}}\end{bmatrix}$$

对于3种不同阶数的ID多小波

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{re}}(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

注:前置滤波是可逆的,通过下面的方程可恢复 $\boldsymbol{S}(n)$

$$\boldsymbol{S}(n)=\sum_k\boldsymbol{P}_{\mathrm{ost}}(k)\boldsymbol{F}(n-k)$$

对于GHM多小波

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{ost}}(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{ost}}(0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{4\times\sqrt{2}}{5} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

对于CL多小波

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{ost}}(0)=\boldsymbol{P}_{\mathrm{re}}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}2 & \frac{1+\sqrt{7}}{2}\\ 2 & -\frac{1+\sqrt{7}}{2}\end{bmatrix}$$

对于3种不同阶数的ID多小波

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{ost}}(0)=\boldsymbol{P}_{\mathrm{re}}^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

显然,一个长度为 N 的标量信号经过前置滤波,就变成一个长度为 $\frac{N}{2}$ 的二维向量信号.

1.3　多小波图象变换

对图象 $\boldsymbol{A}_{N\times N}$ 进行多小波变换的步骤如下

(1) 对 $\boldsymbol{A}_{N\times N}$ 的行向量逐行进行前置滤波,产生

一个 $N\times\frac{N}{2}$ 的向量矩阵，这个向量矩阵由 2 个分量矩阵 $A^{(1)}_{N\times\frac{N}{2}}$ 和 $A^{(2)}_{N\times\frac{N}{2}}$ 组成，把它们前后排列，有

$$A_{N\times N}\underset{\text{Prefiltering Rows}}{\Rightarrow}\left[A^{(1)}_{N\times\frac{N}{2}}\quad A^{(2)}_{N\times\frac{N}{2}}\right]$$

(2) 对 $A^{(1)}_{N\times\frac{N}{2}}$ 的列向量逐列进行前置滤波，产生一个 $\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}$ 的向量矩阵，这个向量矩阵由 2 个分量矩阵 $A^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$ 和 $A^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$ 组成. 同样地，对 $A^{(2)}_{N\times\frac{N}{2}}$ 的列向量逐列进行前置滤波，也产生一个 $\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}$ 的向量矩阵，这个向量矩阵也由 2 个分量矩阵 $A^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$ 和 $A^{(2,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$ 组成. 把这 4 个分量矩阵上下前后排列，于是有

$$\left[A^{(1)}_{N\times\frac{N}{2}}\quad A^{(2)}_{N\times\frac{N}{2}}\right]\underset{\text{Prefiltering Columns}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}A^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} & A^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}\\ A^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} & A^{(2,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}\end{bmatrix}$$

(3) 把 $A^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$ 的行和 $A^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$ 的行逐行组成长度为 $\frac{N}{2}$ 的向量，然后进行多小波分解，得到 2 个 $\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}$ 的向量矩阵，每个向量矩阵都由 2 个分量矩阵组成：$L^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}$、$L^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}$、$H^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}$ 和 $H^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}$. 对 $A^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$ 和 $A^{(2,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}$ 也同此处理，因而有

$$\begin{bmatrix}A^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} & A^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}\\ A^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} & A^{(2,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}\end{bmatrix}\underset{\text{Multiwavelet Decomposition of Rows}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix}L^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & L^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & H^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & H^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}\\ L^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & L^{(2,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & H^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & H^{(2,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}$$

(4) 把 $L^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}$ 的列和 $L^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}$ 的列逐列组成长度为 $\frac{N}{2}$ 的向量信号，进行多小波分解，得到 2 个 $\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}$ 的向量矩阵，每个向量矩阵都由 2 个分量矩阵组成，把它们从上往下排列，有

$$\begin{bmatrix}L^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}\\ L^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}\underset{\text{Multiwavelet Decomposition of Columns}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}LL^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ LL^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ HL^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ HL^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}$$

其他矩阵同样处理，就有

$$\begin{bmatrix}L^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & L^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & H^{(1,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & H^{(1,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}\\ L^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & L^{(2,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & H^{(2,1)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}} & H^{(2,2)}_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}LL^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LL^{(1,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LH^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LH^{(1,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ LL^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LL^{(2,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LH^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LH^{(2,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ HL^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HL^{(1,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HH^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HH^{(1,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ HL^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HL^{(2,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HH^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HH^{(2,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}LL_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} & LH_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}\\ HL_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}} & HH_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}\end{bmatrix}$$

其中

$$LL_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}=\begin{bmatrix}LL^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LL^{(1,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ LL^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LL^{(2,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}$$

$$LH_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}=\begin{bmatrix}LH^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LH^{(1,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ LH^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & LH^{(2,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}$$

$$HL_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}=\begin{bmatrix}HL^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HL^{(1,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ HL^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HL^{(2,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}$$

$$HH_{\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}}=\begin{bmatrix}HH^{(1,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HH^{(1,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\\ HH^{(2,1)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}} & HH^{(2,2)}_{\frac{N}{4}\times\frac{N}{4}}\end{bmatrix}$$

图 2 是对的 Lena 图象进行多小波变换的结果.

(a) Lena 图象　　(b) Lena 图象的多小波变换

图 2　对 Lena 图象(512×512)进行多小波变换的结果

2　多小波图象变换的统计分析

对 512×512 大小的 Lena 图象进行 4 次多小波变换，产生 13 幅子图象：

$\boldsymbol{LL}_1$、$\boldsymbol{HL}_1$、$\boldsymbol{LH}_1$、$\boldsymbol{HH}_1$、$\boldsymbol{HL}_2$、$\boldsymbol{LH}_2$、$\boldsymbol{HH}_2$、$\boldsymbol{HL}_3$、$\boldsymbol{LH}_3$、$\boldsymbol{HH}_3$、$\boldsymbol{HL}_4$、$\boldsymbol{LH}_4$、$\boldsymbol{HH}_4$

其中每幅子图象又包含 4 个分量，如

$$\boldsymbol{LL}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{LL}_1^{(1)} & \boldsymbol{LL}_1^{(2)}\\ \boldsymbol{LL}_1^{(3)} & \boldsymbol{LL}_1^{(4)}\end{bmatrix},\boldsymbol{LH}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{LH}_1^{(1)} & \boldsymbol{LH}_1^{(2)}\\ \boldsymbol{LH}_1^{(3)} & \boldsymbol{LH}_1^{(4)}\end{bmatrix},\cdots$$

然后对子图象的能量特征、数字特征（如均值、方差等）以及量化后零系数的比例进行统计分析，由此得到的数据和结论对多小波的应用（尤其是多小波图象编码）有重要的参考价值.

2.1　能量特征

设 E 表示图象的总能量，$E(f)$ 表示图象 f 的能量，E_1、E_2、E_3 和 E_4 分别表示子图象各个分量的能量总和，即

$$E_1=E(\boldsymbol{LL}_1^{(1)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{LH}_i^{(1)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{HL}_i^{(1)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{HH}_i^{(1)})$$

$$E_2=E(\boldsymbol{LL}_1^{(2)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{LH}_i^{(2)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{HL}_i^{(2)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{HH}_i^{(2)})$$

$$E_3=E(\boldsymbol{LL}_1^{(3)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{LH}_i^{(3)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{HL}_i^{(3)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{HH}_i^{(3)})$$

$$E_4=E(\boldsymbol{LL}_1^{(4)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{LH}_i^{(4)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{HL}_i^{(4)})+\sum_{i=1}^{4}E(\boldsymbol{HH}_i^{(4)})$$

表 1 给出了图象经过 5 种不同的多小波变换后各个子图象以及子图象的各个分量的能量特征.

（1）图象经多小波变换后，各个子图象及其分量的能量特征，是图象压缩编码时，比特分配的基本依据.

（2）表 1 的第 1 项表明，图象经多小波变换后，绝大部分（97%以上）能量都集中在最低分辨率的 $\boldsymbol{LL}_1$ 子图象上. 表 1 的第 4 项从子图象分量的角度来考察，也表明了同样的的事实.

表 1　多小波变换后各子图及子图象各分量的能量特征

比较项目	GHM	CL	CARDBAL2	CARDBAL3	CARDBAL4
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1)}{E}$	97.31	97.36	97.70	97.62	97.71
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1^{(1)})}{E(\boldsymbol{LL}_1)}$	44.76	96.53	25.88	25.67	25.04
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1^{(2)})}{E(\boldsymbol{LL}_1)}$	21.80	2.51	24.15	24.31	24.99
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1^{(3)})}{E(\boldsymbol{LL}_1)}$	22.24	0.62	25.55	25.45	24.93
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1^{(4)})}{E(\boldsymbol{LL}_1)}$	11.20	0.34	24.42	24.53	25.05
$\frac{E_1}{E}$	44.31	95.23	25.86	25.62	24.99
$\frac{E_2}{E}$	22.12	3.07	24.18	24.12	25.04
$\frac{E_3}{E}$	22.14	1.06	25.50	25.38	24.90
$\frac{E_4}{E}$	11.73	0.63	24.46	24.58	25.07
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1^{(1)})}{E_1}$	98.96	98.60	97.78	97.80	97.89
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1^{(2)})}{E_2}$	95.91	79.47	97.58	97.33	97.52
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1^{(3)})}{E_3}$	97.78	56.31	97.87	97.90	97.80
$\frac{E(\boldsymbol{LL}_1^{(4)})}{E_4}$	92.92	52.89	97.56	97.44	97.64

（3）多小波与单小波不同，图象经多小波变换后，不但分解为不同分辨率和不同空间方向的子图象，而且，每个子图象还进一步分解为 4 个分量. 表 1 的第 2 项表明，$\boldsymbol{LL}_1$ 子图象 4 个分量的能量特征随多小波的不同而不同. 对于 CARDBAL2、CARDBAL3、CARDBAL4 多小波，$\boldsymbol{LL}_1$ 子图象的能量平均分配给了它的 4 个分量. 对于 GHM 多小波，$\boldsymbol{LL}_1$ 子图象 4 个分量的能量比大约是：4.5∶2.2∶2.2∶1.1. 对于 CL 多小波，$\boldsymbol{LL}_1$ 子图象能量的绝大部分都分配给了它的第 1 个分量，因此，在图象压缩编码时，绝大部分的比特要用于 $\boldsymbol{LL}_1$ 子图象第 1 个分量系数的编码. 表格的第 3 项表明，即使 13 个子图象通盘考虑，各个分量的能量特征与表格第 2 项表明的事实大致相同.

2.2　量化后零系数的比例

表 2 给出了 Lena 图象的多小波系数经过量化后，零系数在各个子图象中所占的比例. 为了公平比较，对 5 种多小波系数的量化策略都是一样的.

（1）从表 2 可以看到，不论哪一种多小波，子图象的频率成分（也即分辨率）愈高，零系数所占的比例就愈大. 这是因为图象经过多小波分解后，能量主要汇聚于分辨率较低的子图象（如 $\boldsymbol{LL}$ 子图象）的缘故.

表 2　Lena 图经过多小波分解和系数量化后零系数在各子图象中所占的比例

	LL_1	LH_1	HL_1	HH_1	LH_2	HL_2	HH_2	LH_3	HL_3	HH_3	LH_4	HL_4	HH
GHM	0	2.73	6.93	8.40	20.73	33.84	39.06	57.35	69.25	75.15	86.60	92.34	[illegible]
CL	3.81	23.73	40.04	44.53	67.85	81.57	83.69	93.41	97.08	98.83	99.68	99.96	100.00
CARDBAL2	0	2.44	1.69	8.59	19.17	33.57	39.50	57.84	70.13	75.79	87.46	92.75	97.19
CARDBAL3	0	3.03	5.27	9.28	20.70	33.06	40.43	56.88	68.73	75.82	87.17	92.31	97.98
CARDBAL4	0	3.13	5.96	8.01	18.51	32.96	38.21	57.10	69.53	75.53	87.60	93.03	97.27

(2) 从表 2 还可以看到,同一分辨率的子图象零系数所占的比例,CL 多小波比 GHM 多小波要大,GHM 多小波比 CARDBAL 多小波要大. 从图象编码的角度来看,零系数所占的百分比愈大,压缩比也就愈高.

2.3　均值、方差、相关系数和熵

表 3～7 给出了 Lena 图象经过多小波分解后各个子图象的均值 M、方差 σ^2、水平相关系数 $R(0,1)$、垂直相关系数 $R(1,0)$和熵 H.

表 3　Lena 图象经过 GHM 多小波分解后各子图象的均值、方差、相关系数和熵

	LL_1	LH_1	HL_1	HH_1	LH_2	HL_2	HH_2	LH_3	HL_3	HH_3	LH_4	HL_4	HH_4
M	1 922.55	−1.51	3.21	3.97	0.30	0.92	0.22	0.17	0.65	0.04	0.34	0.38	−0.02
H	9.63	8.56	7.65	7.41	7.38	6.43	6.09	5.73	5.03	4.55	4.26	3.80	3.30
σ^2	707 951.21	38 639.25	10 145.78	7 428.41	5 325.69	1 919.04	1 179.89	698.63	334.71	115.57	101.68	71.14	9.44
$R(0,1)$	0.50	0.12	0.05	0.11	0.15	0.12	−0.02	0.10	0.29	0.01	0.09	0.63	0.07
$R(1,0)$	0.73	0.22	0.18	0.07	0.27	0.11	0.10	0.25	0.10	0.13	0.47	0.03	0.06

表 4　Lena 图象经过 CL 多小波分解后各子图象的均值、方差、相关系数和熵

	LL_1	LH_1	HL_1	HH_1	LH_2	HL_2	HH_2	LH_3	HL_3	HH_3	LH_4	HL_4	HH_4
M	125.96	1.41	0.40	0.67	0.01	0.04	−0.01	−0.02	−0.02	0	0.02	−0.01	0
H	7.91	5.95	4.79	4.51	4.03	3.07	2.77	2.28	3.44	1.33	0.98	0.66	0.35
σ^2	53 240.21	632.25	141.91	126.28	80.00	25.65	16.37	9.29	1.66	1.66	1.03	0.31	0.08
$R(0,1)$	0.83	0.03	−0.04	0.13	0.07	−0.06	0.03	0.01	−0.07	0.03	0.03	0.04	0.06
$R(1,0)$	0.90	0.27	0.05	0.07	0.22	0.02	0.08	0.13	0.03	0.11	0.23	−0.01	0.04

表 5　Lena 图象经过 CARDBAL2 多小波分解后各子图象的均值、方差、相关系数和熵

	LL_1	LH_1	HL_1	HH_1	LH_2	HL_2	HH_2	LH_3	HL_3	HH_3	LH_4	HL_4	HH_4
M	1 987.27	0.51	0.74	−1.25	1.81	0.73	0.06	0.08	−0.05	−0.03	0.12	0.02	0
H	9.59	8.53	7.64	7.37	7.39	6.35	6.08	5.67	4.93	4.59	4.21	3.74	3.28
σ^2	482 928.18	31 436.67	9 115.52	7 059.60	5 077.41	1 632.07	1 088.48	590.71	206.45	125.80	63.96	22.63	8.58
$R(0,1)$	0.24	0.10	−0.01	0.07	0.08	0.04	−0.01	0.08	0.05	0.05	0.09	0.09	0.08
$R(1,0)$	0.63	0.13	0.15	0.04	0.25	0.08	0.06	0.08	0.13	0.16	0.24	0.09	0.09

表 6　Lena 图象经过 CARDBAL3 多小波分解后各子图象的均值、方差、相关系数和熵

	LL_1	LH_1	HL_1	HH_1	LH_2	HL_2	HH_2	LH_3	HL_3	HH_3	LH_4	HL_4	HH_4
M	1 985.25	2.82	2.42	−0.60	−0.19	0.52	0.45	−0.06	0.05	−0.03	0.12	0.02	0
H	9.62	8.57	7.62	7.39	7.39	6.34	6.05	5.69	4.99	4.58	1.21	3.77	3.29
σ^2	479 846.97	37 270.06	9 837.38	7 961.47	4 895.14	1 476.17	1 198.84	557.98	215.09	118.60	67.70	24.33	8.84
$R(0,1)$	0.21	−0.01	−0.01	0.05	0.04	0.01	0.02	0.03	−0.01	0.01	0.05	0.08	0.07
$R(1,0)$	0.63	0.18	0.12	0.04	0.18	0.04	0.09	0.11	0.09	0.12	0.25	0.04	0.07

表 7　Lena 图象经过 CARDBAL4 多小波分解后各子图象的均值、方差、相关系数和熵

	LL_1	LH_1	HL_1	HH_1	LH_2	HL_2	HH_2	LH_3	HL_3	HH_3	LH_4	HL_4	HH_4
M	1 986.16	2.95	1.59	−0.39	0.35	0.49	0.45	0.07	0.06	−0.04	0.12	0.02	0
H	9.60	8.59	7.60	7.46	7.39	6.33	6.11	5.68	4.96	4.59	4.19	3.72	3.72
σ^2	182 720.32	35 669.94	8 777.46	8 567.24	4 623.69	1 437.71	1 262.60	546.05	204.75	117.75	61.18	21.38	8.39
$R(0,1)$	0.21	0.07	−0.01	0.11	0.12	−0.03	−0.01	0.09	−0.01	0.01	0.12	0.10	0.08
$R(1,0)$	0.62	0.27	0.23	0.17	0.19	0.11	0.11	0.10	0.17	0.15	0.24	0.13	0.10

均值、方差、相关系数和熵的计算公式如下[8]

$$M=\sum_{k,l}f_{k,l}P(f_{k,l})$$

$$\sigma^2=\sum_{k,l}(f_{k,l}-M)P(f_{k,l})$$

$$H=-\sum_{k,l}P(f_{k,l})\log_2 P(f_{k,l})$$

$$R(\Delta k,\Delta l)=\frac{\sum_{k,l}(f_{k,l}-M)(f_{k+\Delta k,l+\Delta l}-M)}{\sum_{k,l}(f_{k,l}-M)^2}$$

其中，$f_{k,l}$为图象的小波系数值，$P(f_{k,l})$为$f_{k,l}$出现的概率，计算时用频率代替.

从表 3～7 可以看到，$\boldsymbol{LL}_1$ 子图象的均值远远大于其他子图象的均值，这从另一个角度说明，图象经过多小波分解后，绝大部分能量都集中在最低分辨率的 $\boldsymbol{LL}_1$ 子图象上. 另外，从表 3～7 还可以看到，图象经过多小波分解后，各个子图象系数之间的相关性比 Lena 原图象减弱了(Lena 原图象象素之间的相关系数分别为 $R(0,1)=0.94$，$R(1,0)=0.97$)，而且，子图象的分辨率愈高，系数之间的相关性愈小.

3　结　语

(1) 新的图象编码国际标准 JPEG2000 采用小波图象编码作为其基本算法. 可以预期，随着 JPEG2000 的逐步推广，小波图象编码必将再次成为图象编码研究的重点.

(2) 目前，小波图象编码主要使用诸如 D9/7 双正交小波这样的(单)小波进行图象编码. 多小波是一种有别于(单)小波的新小波，多小波应用于图象编码已经初见成效. 但是，也许正因为其新，许多有关多小波图象编码的基本统计数据，尚未见诸各种学术刊物. 这些数据，正象(单)小波图象编码相应的数据一样，对图象编码有重要的参考价值. 本文的工作希望在这方面能够做一些贡献.

(3) 从本文提供的统计数据可以看到：如果要提高图象编码的压缩比，CL 多小波应是首选. 这是因为图象经过 CL 多小波变换后，图象的能量不但汇聚于最低分辨率的 $\boldsymbol{LL}_1$ 子图象上，而且还进一步汇聚于 $\boldsymbol{LL}_1$ 子图象的第 1 个分量上. 另外，图象的 CL 多小波系数经过量化后，零系数出现的比例大于其他多小波. 限于本文的宗旨和篇幅，有关 CL 多小波图象编码的问题参见文献[9].

参 考 文 献

1 Geronimo J S, Hardin D P, Massopust P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several functions [J]. J. Approx. Theory, 1994, 78(2):373～401.

2 Strang G, Strela V. Short wavelets and matrix dilation equations [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1995, 13(1):108～115.

3 Strang G, Nguyen T. Wavelets and filter banks[M]. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1995.

4 Strela V, Heller P N, Strang G *et al*. The application of multiwavelet filter banks to signal and image processing [J]. IEEE Trans. on Image Processing, 1999, 8(4):548～563.

5 Xia X G, Geronimo J S, Hardin D P *et al*. Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 1996, 44(1):25～35.

6 Strela V, Walden A T. Signal and image denoising via wavelet thresholding: Orthogonal and biorthogonal, scalar and multiple wavelet transforms [R]. Imperial College, Statistics Section, Technical Report TR 98-01, 1998.

7 Chui C K, Lian J A. A study of orthonormal multiwavelets[R]. Texas A&M University CAT Report 351, 1995.

8 肖自美. 图象信息理论与压缩编码技术[M]. 广州：中山大学出版社，2000.

9 黄卓君，马争鸣. CL 多小波图象编码[J]. 中国图象图形学报，2001, 6A(7):662～668.

黄卓君　1974 年生，中山大学通信与信息系统专业硕士研究生. 研究方向为多媒体数据处理与传输.

马争鸣　1957 年生，1989 年获清华大学模式识别与智能控制专业博士学位，现为中山大学电子系副教授. 主要学术兴趣为小波分析、分形几何和人工神经元网络.